

Θέμα 1. (4 μον.)

Να εξετάσετε, με πλήρη αιτιολόγηση, αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. (Για όσες είναι αληθείς να γράψετε την πλήρη απόδειξη, ενώ για όσες είναι ψευδείς να βρείτε κατάλληλο αντιπαράδειγμα).

- (Α) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι βασική (ακολουθία Cauchy).
 (Β) Κάθε βασική ακολουθία (ακολουθία Cauchy) πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα.
 (Γ) Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.
 (Δ) Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Θέμα 2. [2 μον.] (α) Πώς ορίζεται ο αριθμός e ; [Γράψτε ότι γνωρίζετε χωρίς αποδείξεις].

(β) Αν $a > 0$ να δείξετε ότι για την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n = \sqrt[n]{a}$ ισχύει $x_n \rightarrow 1$.

(γ) Να βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών (αν υπάρχουν) με πλήρη αιτιολόγηση

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} + 3^n} \quad \beta_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} + 2^n}.$$

Θέμα 3. [1 μον.] Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\log x}$$

Θέμα 4. [1 μον.] Αν $a > 1$ και $x > 0$ να δείξετε ότι $x^a - 1 \geq a(x - 1)$ και να εξετάσετε πότε ισχύει γνήσια ανισότητα και πότε ισότητα.

Θέμα 5. [1 μον.] Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \cos(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Θέμα 6. [1 μον.] Δίνονται τρεις πραγματικοί αριθμοί a, β, ρ με $1 < a < \beta$ και $\rho > \frac{\beta}{a}$. Αν $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f'(y)| \leq \frac{1}{y^\rho}$ για κάθε

$y \in (1, +\infty)$. να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^\beta) - f(x^a)) = 0$.

Καλή επιτυχία!